Lokalizacija II

– treba nam za surjektivnost preslikavanja iz Propozicije 5.

Oznake: F polje alg. brojeva, $\mathcal{O}_F$ prsten cijelih i $\mathfrak{p}$ konačno mjesto od F (ili ideal u $\mathcal{O}_F$)

Za $\mathfrak{p} \in \Omega_f$, neka je $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$ lokalizacija od $\mathcal{O}_F$ u odnosu na multiplikativan skup $\mathcal{O}_F - \mathfrak{p}$ tj.

$$\mathcal{O}(\mathfrak{p}) = \left\{ \frac{a}{b} \in F : a \in \mathcal{O}_F,\ b \in \mathcal{O}_F - \mathfrak{p} \right\}$$

$$\| $$

$$\{ \alpha \in F : \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha) \geq 0 \}$$

lokalni prsten s maksimalnim idealom

$$\hat{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathfrak{p},\ b \in \mathcal{O}_F - \mathfrak{p} \right\}$$

Lako se vidi da vrijedi $G_F = \bigcap_{p \in \Omega_f} G(p)$

Vrijedi općenitija propozicija

Propozicija 6: Neka je V k.d. v.p. nad F i neka je L G_F - rešetka u V. Tada je

$$L = \bigcap_{p \in \Omega_f} G(p) L.$$

Dokaz: Jasno, L se nalazi u presjeku. Obratno, neka je $\{x_1, \dots, x_n\}$ skup generatora za L (kao za G_F - modul). Tada je

To isto skup generatora za $\mathcal{O}(\mathfrak{p})L$ (kao $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$-modul) za svaki $\mathfrak{p}$.

Neka je x u presjeku. Neka je

$$J = \{ y \in \mathcal{O}_F : yx \in L \}.$$

Tada je J integralni (cijeli) ideal od $\mathcal{O}_F$. Ako pokažemo da je $J = \mathcal{O}_F$

onda smo gotovi jer tada $1 \cdot x \in L$. Fiksirajmo $\mathfrak{p} \in \Omega_f$. Tada je

$x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ gdje je $a_i = \frac{b_i}{c_i}$, $b_i, c_i \in \mathcal{O}_F$ i $c_i \notin \mathfrak{p}$ za sve i.

zato što je $\mathfrak{p}$ prost

$J \notin \mathfrak{p}$ ← ali $\mathfrak{p}$ je proizvoljan

$\Downarrow$

Neka je $c = c_1 \cdots c_k$. Tada $c \notin \mathfrak{p}$, ali $c \cdot x \in L \Rightarrow c \in J$.

$J = \mathcal{O}_F$ ∎

Nas će zanimati sljedeća druga posljedica te propozicije.

Korolar 6 Neka je I G_F-ideal u kv. algebri H/F.

Za svaki prosti ideal $\mathfrak{p} \in \Omega_f$, neka je $I(\mathfrak{p})$ $G_F(\mathfrak{p})$-ideal u H

t.d. $I(\mathfrak{p}) = G_F(\mathfrak{p}) I$ za gotovo sve $\mathfrak{p}$. Tada

$$J = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Omega_f} I(\mathfrak{p})$$ je G_F-ideal u H t.d.

$$G_F(\mathfrak{p}) J = I(\mathfrak{p}) \text{ za sve } \mathfrak{p}.$$

Korolar 7. Neka je $\mathcal{O}$ $\mathcal{O}_F$-red u kv. alg. H/F. Tada je $\mathcal{O}$ maksimalan $\mathcal{O}_F$-red ako i samo ako je $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$ $\mathcal{O}$ maksimalan $\mathcal{O}_F(\mathfrak{p})$ red za sve $\mathfrak{p} \in \Omega_f$.

Koja je veza između $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$-ideala i $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$-ideala?

Propozicija 7: Postoji bijekcija između $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$-ideala (redova) u kv. algebri H/F i $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$-ideala (redova) u kv. algebri $H_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}$ dana preslikavanjem $I \mapsto I \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{p})} \mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ čiji je inverz $J \mapsto J \cap H$.

Dokaz: Budući da je $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$ domena glavnih ideala, I je
I ne mora biti slobodan $\mathcal{O}_F$-modul!
slobodan kao $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$-modul. Neka je $\{x_1,..,x_n\}$ baza za I nad $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$.
Tada se $H \cap (I \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{p})} \mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}})$ (u $H_\mathfrak{p}$) sastoji od $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}} \cap F = \mathcal{O}(\mathfrak{p})$
linearnih kombinacija x_i-ova pa je $(I \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{p})} \mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}) \cap H = I$.
postoji inverz. injektivnost
Za surjektivnost, pretp. da je J $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$-ideal u $H_\mathfrak{p}$ i da je $\{y_1,..,y_n\}$
baza za J nad $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$. Neka je $\{z_1,..,z_n\}$ baza za H/F pa je za neke $b_{ij} \in F_\mathfrak{p}$
$z_i = \sum_j b_{ij} y_j$ za sve i te je $B = (b_{ij})$ invertibilna matrica u $M_n(F_\mathfrak{p})$.

što to znači?

Budući da je F gust u F_p možemo odabrati $c_{ij} \in F$ t.d. su elementi od $C = (c_{ij})$ dovoljno blizu onima od B^{-1} t.d. je CB invertibilna u $M_4(\mathcal{O}_{F_p})$. Neka je sada $z_i' = \sum c_{ij} z_j = \sum_{j,k} c_{ij} b_{jk} y_k$. Tada je $\{z_1', \dots, z_4'\}$ baza za J nad $\mathcal{O}_{F_p}$ i istovremeno baza za H/F.

zato što su sve matrice dovoljno blizu I invertibilne.

(C djeluje na $\{z_j\}$)

CB djeluje na $\{y_k\}$

Zato se $J \cap H$ sastoji od $\mathcal{O}_{F_p} \cap F = \mathcal{O}(p)$ linearnih kombinacija z_i' pa je zato $J \cap H$ $\mathcal{O}(p)$-ideal u H sa svojstvom da je

$$(J \cap H) \otimes_{\mathcal{O}(p)} \mathcal{O}_{F_p} = J$$

Nastavak dokaza Propoziciji 5 (surjektivnost)

$G(\mathfrak{p})$ - ideal po prethodnoj propoziciji   zašto?

Pretp. da je dan niz $(L_\mathfrak{p})$ iz $\mathcal{I}$. Tada je $\mathcal{J}(\mathfrak{p}) = H \cap L_\mathfrak{p}$.

Uz to, $\mathcal{J}(\mathfrak{p}) = G(\mathfrak{p})I$ za gotovo sve $\mathfrak{p}$. Tada je

$$\mathcal{J} = \bigcap_\mathfrak{p} \mathcal{J}(\mathfrak{p}) \quad G_F\text{-ideal u } H \text{ i } \mathcal{J}_\mathfrak{p} = L_\mathfrak{p} \text{ za sve } \mathfrak{p}.$$

$\mathcal{J} \mapsto (\mathcal{J}_\mathfrak{p})$

pa je preslikavanje surjektivno. Ako $\mathcal{J}$ i $\mathcal{J}'$ imaju iste

slike po tom preslikavanju onda je $G(\mathfrak{p})\mathcal{J} = G(\mathfrak{p})\mathcal{J}'$ za sve $\mathfrak{p}$

pa je po Propoziciji 6 $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$. ▨

Diskriminanta: F, $\mathcal{O}_F$, H kv. alg. nad F

Definicija 13: Neka je $\mathcal{O}$ $\mathcal{O}_F$-red u H. Diskriminanta od $\mathcal{O}$, $d(\mathcal{O})$, je razlomljeni ideal od $\mathcal{O}_F$ generiran elementima $\det(\mathrm{tr}(x_i x_j))$ za sve četvorke x_1, x_2, x_3 i x_4 iz $\mathcal{O}$.

Budući da je svaki element iz $\mathcal{O}$ cijeli nad $\mathcal{O}_F$, $d(\mathcal{O})$ je cijeli ideal.

Propozicija 8 Ako je $\mathcal{O}_F$-red $\mathcal{O}$ u H slobodan modul s bazom $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ nad $\mathcal{O}_F$, onda je $d(\mathcal{O})$ glavni ideal generiran s $\det(\mathrm{tr}(u_i u_j))$

Primjer 6: Neka je $H = \left(\frac{-1, -1}{\mathbb{Q}}\right)$ i $\mathcal{O}$ $\mathbb{Z}$-red $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}ij$. Tada je $d(\mathcal{O}) = 16\mathbb{Z}$. Ako je $\mathcal{O}'$ $\mathbb{Z}$-red $\mathcal{O} + \mathbb{Z}\alpha$ gdje je $\alpha = \frac{1+i+j+ij}{2}$. Tada je $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ i $d(\mathcal{O}') = 4\mathbb{Z}$

Propozicija 9: Pretp. da je $\mathcal{O}_F$ domena jedinstvene faktorizacije. Ako su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ dva $\mathcal{O}_F$-reda u H t.d. $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$, tada $d(\mathcal{O}_2) \mid d(\mathcal{O}_1)$ i $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ ako i samo ako $d(\mathcal{O}_1) = d(\mathcal{O}_2)$.

Pretp. sada da je F polje alg. brojeva i $\mathcal{O}_F$ prsten cijelih.

zašto?

Neka je $\mathcal{O}$ $\mathcal{O}_F$-red u H. Lako se vidi da je $d(\mathcal{O}(p)\mathcal{O}) = \mathcal{O}(p)\,d(\mathcal{O})$ za sve $p \in \Omega_f$.

Budući da je $\mathcal{O}(p)$ domena glavnih ideala možemo izračunati $L = \bigcap_p \mathcal{O}(p)L$ $d(\mathcal{O}(p)\mathcal{O})$ preko baze od $\mathcal{O}(p)\mathcal{O}$. Tada je prema Propoziciji 6

$$d(\mathcal{O}) = \bigcap_{p \in \Omega_f} d(\mathcal{O}(p)\mathcal{O})$$

Teorem 19: Neka je F polje alg. brojeva i $\mathcal{O}_F$ prsten cijelih.

Neka su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ $\mathcal{O}_F$-redovi u F s $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$. Tada

$d(\mathcal{O}_2) \mid d(\mathcal{O}_1)$ i $d(\mathcal{O}_1) = d(\mathcal{O}_2)$ ako i samo ako $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

Posebno, ako je $d(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_F$ onda je $\mathcal{O}$ maksimalan.

Lokalno-globalni princip za diskriminante redova

$$d(\mathcal{O}) = \prod_{p \in \Omega_f} d(\mathcal{O}_p)$$

Redovi u $M_2(F)$

Kako izgledaju? (F je polje, O_F - Dedekindova domena)

Neka je V 2-dim v.p. nad F s bazom $\{e_1, e_2\}$ tako da $M_2(F) \cong End(V)$.

Označimo s L_0 O_F-rešetku $O_F e_1 + O_F e_2$. Ako je L_0 potpuna rešetka u V

definiramo $End(L) = \{\sigma \in End(V) : \sigma(L) \subseteq L\}$

Posebno, $End(L_0)$ možemo identificirati s $M_2(O_F)$. Jasno je

da je $End(L)$ potpun red od $End(V)$ za svaki L (i $End(L) = End(aL)$ za sve $a \in F^*$)

Za potpunu $\mathcal{O}_F$-rešetku L u V postoji $a \in \mathcal{O}_F$ t.d.

$$a L_0 \subseteq L \subseteq a^{-1} L_0 \quad \text{iz čega slijedi:}$$

zašto?

$$a^2 \operatorname{End}(L_0) \subseteq \operatorname{End}(L) \subseteq a^{-2} \operatorname{End}(L_0)$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{End}(L)$ je $\mathcal{O}_F$-red u $H = M_2(F)$.

- $M_2(\mathcal{O}_F)$ je maksimalan $\mathcal{O}_F$-red u $M_2(F)$ jer je diskriminant od $M_2(\mathcal{O}_F)$ jednaka $\mathcal{O}_F$.

Lema: Neka je $\mathcal{O}$ $\mathcal{O}_F$-red u $\operatorname{End}(V)$. Tada postoji potpuna $\mathcal{O}_F$-rešetka L u V t.d. $\mathcal{O} \subseteq \operatorname{End}(L)$.

Skica dokaza: $L = \{ \ell \in L_0 : \mathcal{O}\ell \subseteq L_0 \}$ je tražena potpuna rešetka.

Korolar 8: Pretp. da je $\mathcal{O}_F$ domena jedinstvene faktorizacije.

Tada su maksimalni $\mathcal{O}_F$-redovi u $M_2(F)$ oblika $\mathrm{End}(L)$, L potpuna rešetka.

Svaki $\mathcal{O}_F$-red u $M_2(F)$ je konjugiran s $M_2(\mathcal{O}_F)$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{O}$ maksimalan $\mathcal{O}_F$-red u $M_2(F)$. Tada po

prethodnoj lemi postoji potpuna $\mathcal{O}_F$-rešetka L u V t.d. $\mathcal{O} = \mathrm{End}(L)$.

Obratno, ako je L potpuna $\mathcal{O}_F$-rešetka u V onda $L = \mathcal{O}_F f_1 + \mathcal{O}_F f_2$

za neku bazu $\{f_1, f_2\}$ od V. Neka je $\sigma \in \mathrm{End}(V)$ t.d. $\sigma(e_i) = f_i$.

Tada je $L = \sigma(L_0)$ pa je $\mathrm{End}(L) = \sigma\, \mathrm{End}(L_0)\, \sigma^{-1} = \sigma\, M_2(\mathcal{O}_F)\, \sigma^{-1}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{End}(L)$ je maksimalan red konjugiran s $M_2(\mathcal{O}_F)$. $\boxed{\text{M}}$

Ako $\mathcal{O}_F$ nije domena gl. ideala onda L nije nužno slobodan $\mathcal{O}_F$-modul, ali postoji baza $\{x, y\}$ od V t.d. $L = \mathcal{O}_F x + \mathfrak{a} y$ za neki razlomljeni ideal $\mathfrak{a}$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{End}(L)$ je konjugiran s

$$M_2(\mathcal{O}_F, \mathfrak{a}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathcal{O}_F \text{ i } b \in \mathfrak{a}^{-1}, c \in \mathfrak{a} \right\}.$$

Pretp. sada da je F p-adsko polje s prstenom cijelih $\mathcal{O}_F$.

Neka je π uniformizator i $q := \# \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $[\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}^n] = q^n$.

Lema: Neka su $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ maksimalni $\mathcal{O}_F$-redovi u $M_2(F)$. Tada

$$\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{O}\cap\mathcal{O}'} \cong \frac{\mathcal{O}'}{\mathcal{O}\cap\mathcal{O}'}$$ kao $\mathcal{O}_F$-moduli.

Skica dokaza: Pokaže se $\cong \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}^n$ za neki n.

Def. 14: Taj n se zove udaljenost maksimalnih redova $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ u $M_2(F)$. Ako je $n=1$ onda kažemo da su redovi susjedni.

Lema: Neka je udaljenost između G i G' jednaka n. Tada postoji $x \in GL_2(F)$ t.d. $\mathrm{ord}_p(\det(x)) = n$ i $G' = x G x^{-1}$.